



ЖУРНАЛ НЕКОММЕРЧЕСКОГО ПАРТНЕРСТВА «СОДЕЙСТВИЕ РАЗВИТИЮ РЕЛЕЙНОЙ ЗАЩИТЫ, АВТОМАТИКИ И УПРАВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ»

РЕЛЕЙНАЯ ЗАЩИТА И АВТОМАТИЗАЦИЯ

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Новинки рынка: проходные клеммы, крышки для испытательных блоков, диагностика электрооборудования и систем РЗА | Способы обеспечения селективности релейной защиты | Релейная защита трехфазных электродвигателей | О методе распознавания нагрузки фидеров | Организация ВЧ-каналов связи на двухцепной трехконцевой линии | Цифровая обработка сигналов РЗА | О подготовке новой редакции Правил технического обслуживания устройств РЗА электросетевого комплекса | О совершенствовании системы подготовки релейщиков для электроэнергетики! | 90 лет В.С. Скитальцеву

№ 01 (26) | Март | 2017



НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ

БРЕСЛЕР



35 ЛЕТ
БЕСПЕРЕБОЙНОЙ
РАБОТЫ

bresler.ru

Реклама



9 77 2222 26002

Авторы:

К.Т.Н. Антонов В.И.^{1,2},
К.Т.Н. Наумов В.А.^{1,2},
Иванов Н.Г.^{1,2},
Солдатов А.В.²,

¹Чувашский государственный университет
им. И.Н. Ульянова,
²ООО НПП «ЭКРА»,
г. Чебоксары, Россия.

Ph. D. Antonov V.I.^{1,2},
Ph. D. Naumov V.A.^{1,2},
Ivanov N.G.^{1,2},
Soldatov A.V.²,

¹Chuvash state university,
²Research-and-production
enterprise EKRA.

Annotation: fundamental properties of effective structural models state that signal is recognized if effective core (the information pattern of signal) is formed in it structural model. It's assumed that potential of effective structural model is mainly determined by noise filter resources regardless to adaptation method. But when processing a short segment of signal the noise filter resources are limited and adaptation method has effect on structural model resolution. There are different approaches for structural model adaptation. The first approach based on least squares criteria includes Wiener estimation, minimum norm method and model superposition

method. The second approach based on total least squares criteria includes basic total least squares solution and total least squares solution with minimum norm. A mechanism of noise impact on structural model resolution

ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДОВ НАСТРОЙКИ АДАПТИВНЫХ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ АВАРИЙНЫХ СИГНАЛОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

ADAPTATION METHODS CHARACTERISTICS OF STRUCTURAL MODELS OF ELECTRICAL NETWORK TRANSIENT SIGNALS

Аннотация:

Фундаментальные свойства эффективных структурных моделей устанавливают, что сигнал распознан, если в модели сформировано эффективное ядро – информационный образ составляющих распознаваемого сигнала. Потенциал эффективной модели обеспечен всеми ресурсами фильтра шума, поэтому предполагается, что он не должен зависеть от методов адаптации (настройки) модели к сигналу. Однако при распознавании сигналов на коротком отрезке порядок структурной модели, а значит, и ресурсы фильтра шума ограничены. В этом случае характеристики моделей существенно зависят от методов их настройки, хотя основные фундаментальные свойства моделей сохраняются.

Методы настройки структурных моделей используют разные стратегии. Первые из них основаны на решении задачи наименьших квадратов; среди них выделяются винеровская оценка, решение с минимальной нормой и метод наложения моделей. Вторые основаны на решении общей задачи наименьших квадратов (в англоязычной литературе Total Least Square solution, TLS-solution) и включают в себя базовое решение и решение с минимальной нормой.

В статье рассматриваются механизмы влияния шумов в сигнале на оценки коэффициентов структурных моделей при использовании упомянутых методов настройки. Возможности методов исследуются при распознавании чистого и искаженного шумом сигналов.

Подтверждается основная проблема винеровской оценки, заключающаяся в потере ее работоспособности с ростом порядка структурной модели или при высоком отношении сигнал/шум из-за ухудшения обусловленности траекторной матрицы. Показано, что при обработке сигнала, представленного небольшой выборкой отсчетов, имеет преимущество решение общей задачи наименьших квадратов с минимальной нормой. С увеличением размера выборки отсчетов сигнала и ростом порядка структурной модели основное влияние на разрешающую способность модели начинает оказывать фильтр шума, и различие в решениях практически исчезает. Однако метод наложения не предъявляет критичных требований к вычислительным ресурсам и способен работать в реальном масштабе развития аварийного процесса в электрической сети, в связи с чем более предпочтителен для применения в цифровой релейной защите.

Ключевые слова: адаптивный структурный анализ, структурная модель, винеровская оценка, метод наложения моделей, метод минимальной нормы, решение общей задачи наименьших квадратов, электроэнергетическая система, релейная защита и автоматика, цифровая обработка сигналов.

Введение

Идея адаптивного структурного анализа сигнала аварийного процесса в электрической сети основана на двух постулатах. Согласно первому из них, электрическую сеть в режиме короткого замыкания можно рассматривать как линейную инвариантную во времени систему, электриче-

ские величины которой представляют собой комбинацию собственных мод сети [1]. Вторым постулатом устанавливается, что, опираясь на ограниченную выборку отсчетов сигнала аварийного процесса, поступающую из электрической сети, можно построить структурную модель, центральный базис



regarding to adaptation method is studied. Comparison of methods based on recognition of clear and noised signal is presented. The main flaw of Wiener estimation namely loss of operability with grows of model order or signal-to-noise ratio due to condition degradation of trajectory matrix is confirmed. It's shown that total least squares solution with minimum norm has advanced resolution over other methods when processing of short signal segment. With growing of signal segment and structural model order the differences between methods results are reduced because noise filter contribution becomes dominant. The superposition method isn't strict to computing resources. Therefore this method is preferred in real time tasks such as digital relay protection.

Keywords: adaptive structural analysis, structural model, Wiener estimation, model superposition method, minimum norm method, total least squares solution, electrical power system, relay protection and automation, digital signal processing.

собственных мод (эффективное ядро [3]) которой эквивалентен базису мод сети.

Таким образом, ключевым моментом структурного анализа является построение модели сигнала. И, как следует из фундаментальных свойств структурных моделей [2], сигнал с шумом будет распознан, если модель становится эффективной [3]. В этом случае эффективное ядро модели содержит всю информацию о структуре сигнала, и необходимые качества модели обеспечиваются ресурсами фильтра шума. Рассматривая процедуру структурного анализа под таким углом зрения, можно предположить, что свойства структурных моделей не должны зависеть от методов их адаптации (настройки) к сигналу. Но, как показывают исследования, такое утверждение справедливо только по отношению к структурным моделям, фильтры шума которых обладают значительным ресурсом для борьбы с шумом в сигнале. И уже при структурном анализе сигнала, представленного небольшой выборкой отсчетов, характеристики моделей существенно зависят от методов их настройки [4], хотя и сохраняют приверженность основным идеям, устанавливаемым фундаментальными свойствами структурных моделей.

В настоящей работе исследуются механизмы влияния шумов в сигнале на разрешающую способность структурных моделей при использовании различных методов настройки. Возможности методов сравниваются на основе результатов распознавания чистого и искаженного шумом сигналов. Статья тесно связана с предыдущей работой авторов [4], посвященной изложению методов настройки структурных моделей, и полностью опирается на ее положения.

1. Структурная модель сигнала

Основным инструментом при распознавании структуры сигнала в адаптивном структурном анализе является структурная модель [5]

$$a_0 \hat{x}(k) = - \sum_{m=1}^M a_m x(k-m), \quad k \geq M, \quad (1)$$

где $a_0 \hat{x}(k)$ – взвешенная с коэффициентом a_0 оценка текущего отсчета сигнала $x(k)$, a_m – искомые коэффициенты модели, M – порядок структурной модели. Коэффициент a_0 может быть произвольным, обычно $a_0 = 1$.

По коэффициентам a_m структурной модели (1) формируется характеристический полином

$$P_M(\zeta) = \sum_{m=0}^M a_m \zeta^{-m},$$

корни которого определяют частоты ω_i и коэффициенты затухания α_i слагаемых сигнала

$$(\alpha_i + j\omega_i) T_s = \ln \zeta_i.$$

Здесь T_s – интервал дискретизации.

Коэффициенты a_m обычно ищут как решение переопределенной системы уравнений в предположении, что модель хорошо описывает сигнал, и отсчеты сигнала и модели равны друг другу $a_0 x(i) - a_0 \hat{x}(i) = 0, i = k-L+1, k, k > M+L$:

$$\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где траекторная матрица \mathbf{X} и вектор наблюдений \mathbf{b} определяются следующим образом:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k-L) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(k-1) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{L \times M} \quad (3)$$

и

$$\mathbf{b} = [x(k-L+1), x(k-L+2), \dots, x(k)]^T \in \mathbf{R}^L, \quad (4)$$

L – число уравнений,

$$\mathbf{a} = [a_M, a_{M-1}, \dots, a_1]^T$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-1) &= \\ &= [x(k-M), x(k-M+1), \dots, x(k-1)]^T \end{aligned}$$

$(M \times 1)$ – векторы параметров модели и наблюдаемых отсчетов сигнала соответственно.

Неотъемлемой частью сигналов аварийного процесса является шум. Шум ухудшает разрешающую способность модели (1) и приводит к повышению ее порядка M . В связи с этим всегда подразумевается, что порядок модели M выше порядка M_s сигнала текущего режима. Шум произволен и не может быть учтен моделью, поэтому уравнение (2) не имеет точного решения и должно быть записано как приближенное равенство

$$\mathbf{X}\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \quad (5)$$

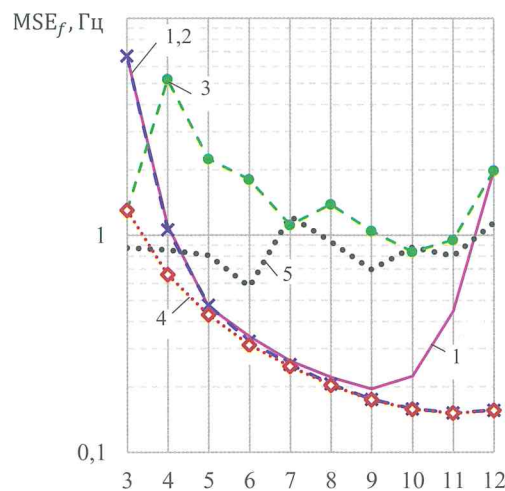
Траекторная матрица и вектор наблюдения системы (5) связаны с шумом как



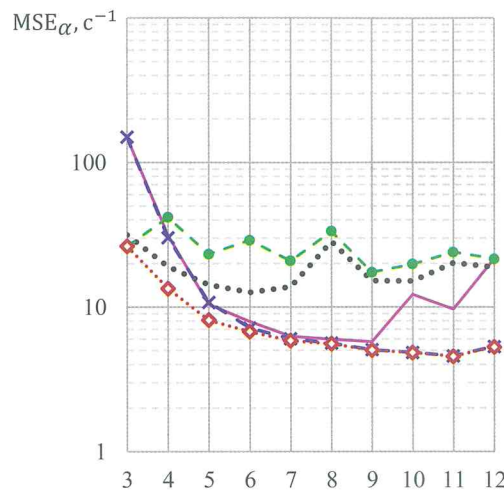
Антонов

Владислав Иванович

Окончил в 1978 г. факультет электрификации и автоматизации промышленности ЧГУ им. И.Н. Ульянова. В 1985 г. защитил в Ленинградском политехническом институте кандидатскую диссертацию по теме «Разработка и исследование новых принципов построения измерительных органов направленных защит линий электропередачи». Доцент кафедры теоретических основ электротехники и релейной защиты и автоматизации ЧГУ им. И.Н. Ульянова, главный специалист отдела РЗА станционного оборудования ООО НПП «ЭКРА».



а)



б)

Рис. 1. Среднеквадратическая ошибка оценок частоты основной гармоники MSE_f (а) и коэффициента затухания аperiodической слагаемой MSE_α (б) при размере выборки 24 отсчета сигнала (20) с отношением сигнал/шум = 100: 1 – винеровская оценка; 2 – решение МНК с минимальной нормой; 3 – базовое решение общей задачи МНК; 4 – решение общей задачи МНК с минимальной нормой; 5 – метод наложения моделей. Размерность доминирующего подпространства в решениях 2 и 4 принята равной 3

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} \quad (6)$$

и

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \Delta\mathbf{b}, \quad (7)$$

где \mathbf{X}_0 и \mathbf{b}_0 – «правильные» траекторная матрица и вектор наблюдения, а $\Delta\mathbf{X}$ и $\Delta\mathbf{b}$ представляют собой ошибки, вызванные шумом в сигнале.

Решение системы (5) не может быть точным, и речь может идти только об отыскании оптимального решения, доставляющего лучшее усредненное приближение структурной модели к сигналу. По способу достижения оптимальности методы решения (настройки модели) могут быть объединены в две группы. Методы первой группы – винеровская оценка, решение с минимальной нормой и метод наложения моделей – основаны на решении задачи наименьших квадратов. Методы второй группы – базовое решение и решение с минимальной нормой – основаны на решении общей задачи наименьших квадратов (в англоязычной литературе Total Least Square solution, TLS-solution).

2. Характеристики методов настройки структурных моделей

Аналитическое сравнение методов настройки структурных моделей по точности при распознавании сигнала с шумом представляет собой сложную задачу и возможно лишь при принятии определенных предположений о характеристиках шума [6, 7]. В настоящей статье полагается, что сигнал содержит только аддитивный белый гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ_x^2 . Такие допущения являются обычными при исследовании методов распознавания сигналов [7].

2.1 Механизм влияния шумов на винеровскую оценку

Винеровская оценка [4, уравнение (14)]

$$\hat{\mathbf{a}}_{LS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{b} \quad (8)$$

основана на предположении, что траекторная матрица (3) не содержит ошибок или шумов, и несовместность системы (2) вызвана лишь ошибками в ее векторе наблюдения (4). Однако при распознавании сигнала траекторная матрица формируется из отсчетов того же сигнала, что и отсчеты вектора наблюдения, и потому она также не лишена шума. В конечном итоге траекторная матрица транслирует шум в ковариационную ма-



Наумов

Владимир Александрович

Окончил в 2001 г. электроэнергетический факультет ЧГУ им. И.Н. Ульянова.

В 2002 г. защитил магистерскую диссертацию. В 2005 г. защитил во ВНИИЭ кандидатскую диссертацию по теме «Анализ и совершенствование продольных дифференциальных защит генераторов и блоков генератор-трансформатор». Доцент кафедры теоретических основ электротехники и релейной защиты и автоматики ЧГУ им. И.Н. Ульянова, заместитель генерального директора - технический директор ООО НПП «ЭКРА».

трицу $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, вызывая погрешность в оценке вектора коэффициентов фильтра $[\hat{\mathbf{a}}_{LS}; -1]$.

Механизм влияния шума на винеровское решение становится вполне понятным, если расписать ковариационную матрицу с учетом связи (6) между «правильной» \mathbf{X}_0 и измеренной \mathbf{X} траекторными матрицами:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_0^T \Delta \mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X}.$$

Поскольку шум не коррелирован с полезным сигналом и имеет нулевое среднее и дисперсию σ_x , то в ковариационной матрице шум сосредоточен только в элементах главной диагонали

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \approx \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}^T \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_0^T \mathbf{X}_0 + \sigma_x \mathbf{I}. \quad (9)$$

Следуя выводам работы [8], отметим, что именно шум траекторной матрицы \mathbf{X} вносит основной вклад в погрешность винеровской оценки. Интуитивно это видно и из структуры винеровской оценки (8). Оценки подвержены влиянию возмущения вектора наблюдения \mathbf{b} пропорционально числу обусловленности

$$\kappa(\mathbf{X}) = \sigma_1 / \sigma_M$$

траекторной матрицы, а влиянию возмущений самой траекторной матрицы – пропорционально $\kappa^2(\mathbf{X})$ (здесь σ_1 и σ_M – старший и младший сингулярные числа траекторной матрицы \mathbf{X}). Следовательно, винеровское решение предпочтительно в случае хорошо обусловленной траекторной матрицы.

2.2 Улучшение винеровских оценок

Улучшение винеровской оценки возможно лишь в рамках ее базовых положений. Основной из них заключен в предположении, что траекторная матрица \mathbf{X} не содержит шумов, и лишь вектор наблюдения (7) подвержен их аддитивному влиянию. Рассматривая винеровское решение под таким углом зрения, уравнение (5) можно переписать, выделив в нем вектор шума \mathbf{n}

$$\mathbf{b} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \mathbf{n}.$$

Если ковариационная матрица шума $\mathbf{R}_n = E([\mathbf{n}^T \mathbf{n}])$ известна, то можно исключить влияние шума \mathbf{n} на винеровскую оценку. Это

хрестоматийный случай. Его решение можно найти во многих учебниках по теории оценивания параметров и фильтрации, например в [13]:

$$\hat{\mathbf{a}}_{LS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{b}. \quad (10)$$

Когда шум не коррелирован (белый шум), то оценка (10) совпадает с оценкой (8), и при принятых нами свойствах дисперсии шума ковариационная матрица оценки $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ будет

$$\mathbf{Q}_{LS} = \sigma_x^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}. \quad (11)$$

Но, как мы помним, траекторная матрица тоже содержит шумы. Поэтому оценка (10) далека от совершенства, особенно для тех случаев, когда траекторная матрица и вектор наблюдения порождаются одним процессом.

Очевидно, что улучшение винеровской оценки невозможно без внимания к шуму в траекторной матрице \mathbf{X} . Это возможно сделать путем анализа влияния шума на собственные числа ковариационной матрицы $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$. Реализуются они, как правило, в виде процедуры построения моделей минимальной нормы.

2.3 Преимущества моделей с минимальной нормой

При анализе собственных чисел ковариационной матрицы удобно пользоваться сингулярным разложением [4, (18)] траекторной матрицы, поскольку известно, что собственные числа λ_i ковариационной матрицы $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ равны квадрату соответствующих сингулярных чисел σ_i^2 траекторной матрицы \mathbf{X} , т.е. $\lambda_i = \sigma_i^2$ [8].

Использование сингулярного разложения изменяет решение задачи МНК, позволяя выразить оценку параметров модели сигнала через сингулярные векторы траекторной матрицы, пользуясь понятием ε -ранга [4, (22)]. Ожидается, что возможность анализировать сингулярные числа позволит улучшить оценку модели. Надежды связаны со свойством сингулярного разложения ранжировать сингулярные числа по невозрастанию, располагая числа, согласованные с доминирующими составляющими сигнала (с полезным сигналом) в верхней части диагонали матрицы. И хотя наличие шума в сигнале придает траекторной матрице \mathbf{X} полный ранг, но решение задачи МНК формируется на основе только доминирующих сингулярных чисел путем отсекаания «хвоста» слабых сингулярных чисел. Этот подход полностью реализован в решении минимальной нормы $\hat{\mathbf{a}}_{MN}$ [4, (23)].



Иванов Николай Геннадьевич
Окончил в 2013 г. кафедру ТОЭ и РЗА электроэнергетического факультета ЧГУ им. И.Н. Ульянова, получил степень магистра техники и технологии по направлению «Электроэнергетика и электротехника». Аспирант ЧГУ им. И.Н. Ульянова по профилю 05.14.02 «Электрические станции и электроэнергетические системы». Инженер I категории отдела РЗА станционного оборудования ООО НПП «ЭКРА».



Солдатов Александр Вячеславович
Окончил в 2006 г. электроэнергетический факультет ЧГУ им. И.Н. Ульянова по специальности «инженер». Заместитель заведующего отделом РЗА станционного оборудования ООО НПП «ЭКРА».

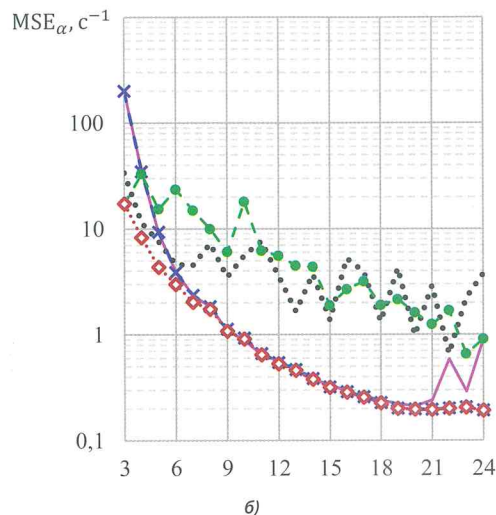
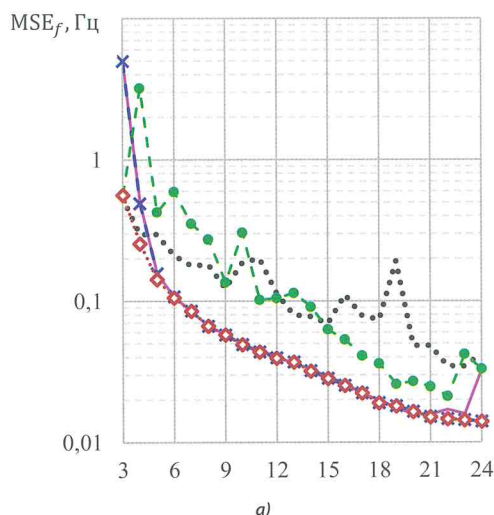


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка оценок частоты основной гармоники MSE_f (а) и коэффициента затухания аperiodической слагаемой MSE_α (б) при размере выборки 48 отсчетов сигнала (20) с отношением сигнал/шум = 100. Обозначения кривых приведены на рис. 1

Рассмотрим, каким образом и в каких случаях моделям с минимальной нормой удастся повысить точность оценки по сравнению с винеровской оценкой.

Если в решении минимальной нормы учитываются все сингулярные числа траекторной матрицы \mathbf{X} , то оно будет равносильно винеровскому решению. Известно [8, 9], что винеровская оценка подвержена сильным возмущениям случае с плохо обусловленной траекторной матрицей. И поэтому даже такое тривиальное использование сингулярного разложения вполне оправданно, имея в виду, что оно обеспечивает более точное и устойчивое к возмущениям решение задачи наименьших квадратов.

Винеровское решение может быть представлено как

$$\hat{\mathbf{a}}_{LS} = \sum_{i=1}^M \delta_i \mathbf{v}_i, \quad (12)$$

где

$$\delta_i = \sigma_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}), \quad (13)$$

вес сингулярного вектора \mathbf{v}_i в оценке. Матрица сингулярных чисел

$$\Sigma_x = \Sigma_0 + \Sigma_\Delta$$

траекторной матрицы \mathbf{X} в соответствии с (6) со-

стоит из суммы матриц сингулярных чисел

$$\Sigma_0 = \text{diag}(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{M_s}, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{L \times M} \quad (14)$$

полезного сигнала \mathbf{X}_0 и сингулярных чисел

$$\Sigma_\Delta = \text{diag}(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{M_s}, \tilde{\sigma}_{M_s+1}, \dots, \tilde{\sigma}_M) \in \mathbf{R}^{L \times M}, \quad (15)$$

вызванной возмущением $\Delta \mathbf{X}$. Видно, что ошибки вычислений и шум в сигнале приводят к росту сингулярных чисел, ассоциированных с полезным сигналом, и появлению «хвоста» в итоговой матрице

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_\Delta = \text{diag}\{(\bar{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_1), \dots, (\bar{\sigma}_M + \tilde{\sigma}_M), \tilde{\sigma}_{M+1}, \dots, \tilde{\sigma}_M\}. \quad (16)$$

Рассматривая винеровскую оценку (12) с учетом свойств (14) – (16) составляющих матрицы сингулярных чисел Σ_x , несложно понять структуру погрешности в оценке $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$.

Прежде всего под действием шума все сингулярные числа, ассоциированные с полезным сигналом (числа $\bar{\sigma}_i$ номерами $i \leq M_s$), будут иметь возмущение на величину $\tilde{\sigma}_i$ ($i \leq M_s$), связанное с шумом. Величина возмущения будет тем значительнее, чем ниже отношение сигнал/шум.

Кроме того, шум в сигнале повышает ранг траекторной матрицы до полного, в результате чего элементы в матрице сингулярных чисел Σ_x

траекторной матрицы, начиная с номера ($i > M_s$), будут заполнены сингулярными числами, вызванными ошибками вычислений и шумом в сигнале. Этот «хвост» сингулярных чисел, непосредственно не связанный с полезным сигналом, внесет свою долю возмущения в решение (12). Причем его воздействие на решение зависит от соотношения сигнал/шум. Если шум в сигнале достаточно высок, то ранг траекторной матрицы полон, и в решении (12) используются все сингулярные векторы $\mathbf{v}_i, i = 1, M$. В этом случае решение будет уникальным и эквивалентным винеровскому. Но если соотношение сигнал/шум будет значительным, то сингулярные числа (15) будут относительно малы, что сделает траекторную матрицу плохо обусловленной. В этом случае даже незначительное возмущение сингулярных чисел $\tilde{\sigma}_i$ ($i > M_s$), «хвоста» вызывает существенный разброс в решении (12), поскольку при вычислении веса σ_i по (13) в знаменателе формулы оказывается малое сингулярное число $\tilde{\sigma}_i$.

Оценке наименьших квадратов с минимальной нормой присуща высокая устойчивость решения при значительном соотношении сигнал/шум и плохой обусловленности задачи, благодаря ее способности убирать из решения составляющие, испытывающие сильное возмущение из-за малости сингулярных чисел (из-за большого коэффициента обусловленности). Однако реализация этих преимуществ требует существенных вычислительных затрат, и поэтому она оправдана только при отсутствии ограничений в вычислительных ресурсах. В ином случае предпочтение следует отдать методу наложения моделей, свойства которого при распознавании сигнала с высоким соотношением сигнал/шум близки к свойствам моделей с минимальной нормой.

2.4 Преимущества моделей общей задачи МНК

Разница между винеровской оценкой $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ и базовым TLS-решением $\hat{\mathbf{a}}_{TLS}$ [4, (43)] хорошо видна из замкнутой формы выражения для последнего [6, Теорема 2.7]:

$$\hat{\mathbf{a}}_{TLS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \sigma_{M+1}^{\prime 2} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^M (\sigma_i^2 - \sigma_{M+1}^{\prime 2})^{-1} \sigma_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{b}. \quad (17)$$

Здесь $\sigma_{M+1}^{\prime} + \varepsilon$ – последнее сингулярное число расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$, σ_i^{\prime} – сингулярные числа траекторной матрицы \mathbf{X} . Прежде чем вычислить инверсию в решении (17), базовое решение уменьшает элементы главной диагонали ковариационной матрицы $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ на величину последнего сингулярного числа расширенной матрицы. Ожидается, что это свойство позволяет базовому решению улучшить свою оценку по сравнению с винеровской оценкой за счет очистки диагонали ковариационной матрицы от шума [6, 10]. Теоретически такая возможность существует, если $\sigma_{M+1}^{\prime} \neq \sigma_M$ (σ^{\prime} – последнее сингулярное число траекторной матрицы).

В случае распознавания сигнала с шумом траекторная матрица \mathbf{X} будет полного ранга, поэтому все ее сингулярные числа будут отличны от нуля. Кроме того, в силу теоремы следования [6, Теорема 2.4] сингулярные числа траекторной и расширенной матриц должны перемежаться, т.е. между двумя сингулярными числами расширенной матрицы должно находиться сингулярное число траекторной матрицы и наоборот

$$\sigma_1^{\prime} \geq \sigma_1 \geq \sigma_2^{\prime} \geq \dots \geq \sigma_M \geq \sigma_{M+1}^{\prime}.$$

Поэтому оценка (17) теоретически должна быть лучше, чем винеровская оценка.

Однако в задачах распознавания сигналов часто сингулярные числа σ_{M+1}^{\prime} и σ_M близки друг к другу, поскольку элементы траекторной матрицы \mathbf{X} и вектора наблюдения \mathbf{b} являются отсчетами одного и того же сигнала. В этом случае базовое решение теряет уникальность и перестает быть решением минимальной нормы [6]. Из (17) видно, что базовое решение склонно к существенному разбросу даже при незначительном возмущении сингулярных чисел.

Недостаток базового TLS-решения преодолевается в TLS-решении с минимальной нормой, имеющей следующий вид в замкнутой форме [10]:

$$\hat{\mathbf{a}}_{TLS-MN} = \sum_{i=1}^B (\sigma_i^2 - \sigma^{\prime 2})^{-1} \sigma_i \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{b}, \quad (18)$$

где σ^{\prime} – некоторое число, входящее в область сингулярных чисел от σ_{M+1}^{\prime} до $\sigma_{M+1}^{\prime} + \varepsilon$. Отличие оценки $\hat{\mathbf{a}}_{TLS-MN}$ (18) от оценки $\hat{\mathbf{a}}_{TLS}$ (17) заключается в том, что в нем число σ явно не определено и символизирует собой эффект усредненного учета влияния шума в траекторной матрице и векторе наблюдения.

Идея учета шума становится более ясной, если переписать (18) в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{a}}_{TLS-MN} = \sum_{i=1}^B (\sigma_i - \sigma^{\prime 2} / \sigma_i)^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{b}. \quad (19)$$

Оценка $\hat{\mathbf{a}}_{TLS-MN}$ (19) будет давать лучшее решение, чем решение $\hat{\mathbf{a}}_{MN}$ [4, (22)], если возмущение сингулярных чисел будет вблизи $\sigma^{\prime 2} / \sigma_i$ [10].

3. Сравнение методов

Для сравнения методов настройки структурных моделей использовались результаты вычислительного эксперимента, заключающегося в распознавании сигнала

$$x(k) = \cos\left(\frac{\pi}{12}k\right) - e^{-\frac{k}{24}} + x_n(k), \quad (20)$$

где $x_n(k)$ – отсчеты белого гауссовского шума.

3.1 Распознавание сигнала без шума

Понятно, что распознавание сигнала без шума представляет собой идеализированную задачу, но она позволяет выявлять особенности и общие свойства методов. Так как сигнал не содержит шума, то ее модель может быть минимального порядка, равного порядку сигнала, т.е. $M = M_s$. Такая модель по определению является моделью эффективного ядра сигнала. Поэтому мини-

мальное число уравнений или строк в траекторной матрице \mathbf{X} в уравнении (2), необходимое для получения эффективной структурной модели сигнала (20), равно 3. В этом случае возможно прямое решение

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{b},$$

и его результат совпадает с вектором коэффициентов эффективного ядра

$$\mathbf{a}^T = a_0 [b_s + b_e; 1 + b_s b_e; b_e], \quad (21)$$

$$b_s = -2 \cos(k\pi / 12), \quad b_e = -e^{-1/24}.$$

Полином эффективного ядра будет следующим:

$$P_{M_c}(\underline{z}) = (\underline{z} - 0,9659 \pm j0,2588) \cdot (\underline{z} - 0,9592). \quad (22)$$

В эксперименте с целью усреднения оценки вектора коэффициентов \mathbf{a} общее число L уравнений для всех методов принято равным 10, порядок модели M взят на единицу больше, чем порядок сигнала: $M = M_s + 1 = 4$.

Винеровская оценка. Поскольку порядок модели M превышает порядок сигнала M_s , то ранг ковариационной матрицы $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ будет иметь дефект $d = M - M_s = 1$ (d – число линейно независимых уравнений), а уравнение (5) – бесконечное число решений [11, 12]. Именно из-за этого огреха винеровское решение часто утрачивает способность получения эффективной модели в условиях структурной неопределенности сигнала.

Сигнал распознается только при совпадении порядка модели с порядком сигнала ($M = M_s = 3$). Точность определения коэффициентов (21) сохранится, хотя определитель Δ траекторной матрицы \mathbf{X} довольно мал ($\Delta = 0,00398$). Но уже при повышении порядка модели на единицу ($M = 4 > M_s$) определитель траекторной матрицы становится недопустимо малым $\Delta = 1,41 \cdot 10^{-16}$ (для арифметики с двойной точностью), и модель перестает удовлетворять требованию эффективности: ни один из корней ее характеристического многочлена не принадлежит эффективному ядру (22).

Метод наложения моделей.

В эксперименте использовалось 5 промежуточных моделей с $M = 4$, начальные коэффициенты которых задавались в виде матрицы с единичной диагональю [4, (84)]. Как и ожидалось, настройка структурной модели завершилась после 3-х наложений по условию [4, (96)], и были получены 2 эффективные структурные модели:

$$\mathbf{a}_0^T = [1; -2,8910; 2,8530; -0,9592; 0],$$

$$\mathbf{a}_1^T = [-0,2542; 1; -1,4915; 1; -0,2542].$$

Модель с нулевым номером определяет модель минимального размера; ее порядок совпадает с размером эффективного ядра. Характеристический полином модели с номером 1

$$P_{SM}(\underline{z}) = -0,2542 P_{M_c}(\underline{z})(\underline{z} - 1,0425)$$

наряду с эффективным ядром (22) содержит лишний (физически нереализуемый) корень $z_4 = 1,0425$, который будет удален при компонентном анализе.

Оценки МНК с минимальной нормой. Модель 4-го порядка, полученная как решение минимальной нормы [4, (22)] при использовании первых 3-х сингулярных чисел траекторной матрицы, имеет следующие коэффициенты:

$$\mathbf{a}_{MN}^T = [-2,1377; 0,6749; 1,1902; -0,7226].$$

Множество корней характеристического многочлена включает в себя эффективное ядро (22) и корень $z_4 = -0,7534$ несуществующей составляющей:

$$P_{MN}(\underline{z}) = P_{M_c}(\underline{z})(\underline{z} + 0,7534). \quad (23)$$

Поскольку эффективное ядро в модели представлено, то модель правильно распознает структуру сигнала. Лишняя составляющая будет удалена из модели при компонентном анализе сигнала по условию ограничения предельного коэффициента затухания составляющей.

TLS-решения. Хотя расширенная матрица увеличивает число столбцов на единицу за счет присоединения век-

тора наблюдений, но ранг расширенной матрицы не повысится и равен порядку сигнала, т.е. 3. Следовательно, число ненулевых сингулярных чисел тоже не изменится и будет равно 3.

То обстоятельство, что два последних сингулярных числа будут нулевыми, означает, что существуют две аппроксимирующие матрицы, расстояние от которых до исходной траекторной матрицы равно нулю. Поэтому для базового TLS-решения возможны сразу два решения.

Одно из них может быть получено из вектора \mathbf{V}_{M+1} [4, (43)]:

$$P_{TLS}(\underline{z}) = P_{M_c}(\underline{z})(\underline{z} + 0,8921), \quad (24)$$

а другое – аналогично из вектора \mathbf{V}_M :

$$P_{TLS}(\underline{z}) = P_{M_c}(\underline{z})(\underline{z} - 2,3636).$$

Оба решения формируют в характеристическом многочлене эффективное ядро (22) и по одному лишнему корню $z_4 = -0,8921$ и $z_4 = 2,3636$, которые будут удалены при компонентном анализе.

TLS-решение с минимальной нормой. Его свойства зависят от размера подпространства \mathbf{V}_s' [4, (49)]. Если отнести к подпространству сигнала \mathbf{V}_s' только первые 3 вектора матрицы \mathbf{V}' , то это решение будет эквивалентно решению МНК с минимальной нормой (23). В случае, когда в решении используется подпространство \mathbf{V}_s' из 4 векторов, оно будет эквивалентно базовому TLS-решению (24). Такое соответствие между методами возникает только при распознавании сигнала без шума, и вызвано оно тем обстоятельством, что последние сингулярные числа расширенной матрицы равны строго нулю.

3.2 Распознавание сигнала с шумом

Свойства методов настройки исследовались при распознавании 100 различных реализаций сигнала (20). Использовались выборки размерами 24 и 48 отсчетов, для каждого размера выборки порядок структурной модели M варьировался от 3 до 12 и от 3 до 24 соответственно. Критериями сравнения были приняты среднеквадратическая ошибка оценки ча-

стоты основной гармоники

$$MSE_f = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{f}_i - 50)^2}$$

и среднеквадратическая ошибка оценки коэффициента затухания апериодической слагаемой

$$MSE_\alpha = \sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\alpha}_i - 50)^2},$$

где \hat{f}_i и $\hat{\alpha}_i$ – оценки коэффициента затухания апериодической слагаемой и частоты основной гармоники соответственно, полученные для i -ой реализации сигнала.

При распознавании сигнала с шумом проявляется в полной мере фундаментальное свойство структурных моделей, устанавливающее, что структура сигнала может быть определена, если фильтр шума имеет достаточные ресурсы, чтобы повысить отношение сигнал/шум до необходимого уровня. Вычислительный эксперимент (рис. 1 и 2) полностью подтверждает это свойство: с ростом порядка модели величина среднеквадратичного отклонения оценок частоты и коэффициента затухания составляющих сигнала уменьшается независимо от метода настройки.

Прежде всего, шум в сигнале повышает ранг траекторной матрицы X до порядка модели M , делая его полным. Это создает условия для работы винеровского решения.

В то же время шум ожидаемо ухудшает оценки всех методов. Однако каждый из методов настройки влияние шума испытывает по-разному. Винеровское решение \hat{a}_{LS} практически совпадает с решением МНК с минимальной нормой \hat{a}_{MN} , полностью подтверждая ту мысль, что при обработке сигнала с шумом преимущества последнего выпукло проявляются лишь при плохой обусловленности задачи МНК [9 (§ 3.3); 12 (§ 5.3.2)].

Базовое \hat{a}_{TLS} [4, (43)] решение общей задачи МНК при $M > 3$ имеет существенно большее среднеквадратичное отклонение по сравнению с остальными методами.

Хотя метод наложения и относится к методам решения задачи МНК, но его оценки имеют большие отклонения,

чем винеровская оценка. Объясняется это тем, что в ходе наложений промежуточных фильтров величина корреляций быстро падает, и, начиная с некоторого этапа наложений, ее абсолютная величина колеблется на уровне, сравнимом с уровнем корреляции невязок с шумом. В этом случае коэффициенты наложения [4, (78)] по абсолютной величине будут стремиться к 1, что приводит к срабатыванию условия [4, (103)], и метод вынужден прекратить настройку моделей. Тем не менее метод наложения имеет преимущество перед базовым решением общей задачи МНК, особенно при распознавании сигнала на коротком отрезке и при невысоком порядке модели.

TLS-решение с минимальной нормой \hat{a}_{TLS-MN} выигрывает у всех оценок и проявляет себя как стабильное решение. Его преимущества более выражены при распознавании сигнала на коротком отрезке.

Выводы

1. Подтверждается основной недостаток винеровской оценки, заключающийся в потере точности решения из-за ухудшения обусловленности системы уравнений при росте порядка структурной модели.

2. Базовое решение общей задачи МНК уступает практически всем методам настройки. Объясняется это тем, что младшие сингулярные числа траекторной X и расширенной X' матриц становятся неразличимо близки друг к другу. В таких условиях базовое решение теряет способность сопротивляться возмущениям в траекторной матрице и векторе наблюдения.

3. Решение общей задачи МНК с минимальной нормой при малом порядке структурной модели обеспечивает большую точность по сравнению с винеровской оценкой и решением минимальной нормы. Объяснение кроется в том, что при малом порядке модели существенный вклад в повышение точности оценки дает учет шума. С ростом порядка модели вклад, вносимый фильтром шума эффективной модели, становится все значительнее, и различие в решениях практически исчезает.

4. При распознавании сигнала с шумом все методы настройки обеспечивают приемлемый для релейной защиты и противоаварийной автоматики уровень точности оценок частоты и коэффициента затухания составляющих сигнала. Однако метод наложения не предъявляет критичных требований к вычислительным ресурсам терминалов релейной защиты. Это означает, что метод наложения моделей способен работать в реальном масштабе развития аварийного процесса в электрической сети и более предпочтителен для применения в цифровой релейной защите.

Литература:

1. Антонов В.И., Наумов В.А., Фомин А.И., Солдатов А.В. Адаптивный структурный анализ входных сигналов цифровой релейной защиты и автоматики // Электротехника. – 2015. – №7. – С. 28-35.
2. Антонов В.И., Наумов В.А., Солдатов А.В., Иванов Н.Г. Фундаментальные свойства эффективных структурных моделей тока короткого замыкания электрической сети // Цифровая электротехника: проблемы и достижения: сб. науч. трудов НПП «ЭКРА». Выпуск 3. – Чебоксары: РИЦ «СРЗА». – 2014. – С. 18-29.
3. Антонов В.И., Наумов В.А., Фомин А.И. Эффективные структурные модели входных сигналов цифровой релейной защиты и автоматики // Электричество. – 2012. – №11. – С. 2-8.
4. Антонов В.И., Наумов В.А., Иванов Н.Г., Солдатов А.В. Методы настройки адаптивных структурных моделей сигналов аварийных режимов электрической сети // Цифровая электротехника: проблемы и достижения: Сборник научных трудов НПП «ЭКРА». Выпуск 5. – Чебоксары: РИЦ «СРЗА». – 2016. – С. 7-44.
5. Антонов В.И., Ильин А.А., Лазарева Н.М. Адаптивные структурные модели входных сигналов релейной защиты и автоматики // Электротехника. – 2012. – №1. – С. 52-55.
6. Huffel S. V., Vandewalle J. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis. Philadelphia: SIAM. 1991. – 300 p.
7. Abatzoglou T.J., Mendel J.M., Harada G.A. The Constrained Total Least Squares Technique and its Applications to Harmonic Superresolution // IEEE Trans. on Signal Processing. 39(5). 1991. P. 1070. –1087.
8. Уоткинс Д.С. Основы матричных вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. – 2006. – 664 с.
9. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир. – 2001. – 430 с.
10. Rahman M. A., Yu Y. K. Total Least Square Approach for Frequency Estimation using Linear Prediction // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. Vol. ASSP-35. Oct. 1987. – P. 1440-1454.
11. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения: Пер. с англ. // Под ред. Г.И. Марчука. М.: Мир. –1980. – 454 с.
12. Голуб Дж. Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир. – 1999. – 548 с.
13. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд. – М.: Энергоатомиздат. – 1987. – 496 с.